

Дәріс №9. Қос интеграл. Қос интегралды есептеу.

Анықталған интеграл сияқты, қос интеграл интегралдық қосындының шегі ретінде анықталады. Алдымен төртбұрыш бойынша алынған қос интеграл ұғымына тоқталайық. $R=[a \leq x \leq b] \times [c \leq y \leq d]$ төртбұрышында анықталған $f(x,y)$ функциясы берілсін. $[a,b]$ сегментін $a=x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ нүктелері арқылы n бөлікке, ал $[c,d]$ сегментін $c=y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$ нүктелері арқылы m бөлікке бөлшектейік. $\times [c \leq y \leq d]$ Осы бөлшектеу нүктелері арқылы координаталық өстерге параллель түзулер тұрғызамыз. Сонда R төртбұрышы $n \cdot m$ дербес $R_{kl} = [x_{k-1} \leq x \leq x_k] \times [y_{l-1} \leq y \leq y_l]$ ($k=1,2,\dots,n; l=1,2,\dots,m$) төртбұрыштарына бөлшектеледі. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_l = y_l - y_{l-1}$, белгілеулерін енгізейік. R_{kl} төртбұрыштары диагональдарының ең ұзынын d деп белгілейік. Әрбір R_{kl} төртбұрышында бір-бір N_{kl} (ξ_k, η_l) нүктесін (оларды аралық нүктелер деп те атайды) еркін тандайық..

$$\sigma = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m f(\xi_k, \eta_l) \Delta R_{kl} \quad (1)$$

қосындысын $f(x,y)$ функцияның R төртбұрышын алынған нүктелермен бөлшектеген тәсілге және аралық N_{kl} (ξ_k, η_l) нүктелерін тандау тәсіліне сәйкес **интегралдық қосынды** дейміз.

Анықтама. $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma$ тежжеулі шегі бар болса, $f(x,y)$ функциясы R төртбұрышында интегралданады деп аталады. Ал шектің мәнін $f(x,y)$ функциясының R төртбұрышы бойынша қос интегралы (екі еселі интеграл) деп аталады.

Сонымен

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma \quad (2)$$

Функция интегралдануы шарты бұл жағдайда да Дарбу қосындылары арқылы беріледі. Дарбу қосындыларының қасиеттері анықталған интеграл тақырыбындағыдай.

Теорема. R төртбұрышында анықталған, тежеулі $f(x,y)$ функциясының осы төртбұрышта интегралдануы үшін $\forall \varepsilon > 0$ саны бойынша $S - s < \varepsilon$ болатындай, төртбұрышты бөлшектеу тәсілінің табылуы қажетті әрі жеткілікті.

Енді $f(x,y)$ функциясы жазықтықтағы D фигурасында анықталсын дейік. Мынадай көмекші функция енгізейік:

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D; \\ 0, & (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$$

$\iint_R F(x,y) dx dy$ санын $f(x,y)$ функциясының D облысындағы екі еселі интегралы деп атаймыз және былай белгілейміз:

$$\iint_D f(x,y) dx dy. \quad (3)$$

Енді R төртбұрышы орнына T -тік параллелепипедін алып, екі айнымалы $f(x,y)$ функциясы орнына параллелепипед нүктелерінде анықталған $f(x,y,z)$ функциясын қарастырсақ

$$\sigma = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \sum_{t=1}^r f(\xi_k, \eta_l, \mu_t) \Delta R_{klt}$$

интегралдық қосындысын, ал оның шегі ретінде үш еселі интегралда анықтаған болар едік:

$$\iiint_T f(x,y,z) dx dy dz = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma$$

Екі еселі интегралдың негізгі қасиеттері

$D = D_1 \cup D_2$ және $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ - бос жиын болатын жиындарда $f(x,y)$ функциясы анықталған дейік.

- $\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D_1} f(x,y) dx dy + \iint_{D_2} f(x,y) dx dy$
- $\iint_D dx dy = S_D$ - D -ның ауданы
- $\iint_D [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)] dx dy = \alpha \iint_D f(x,y) dx dy + \beta \iint_D g(x,y) dx dy$.
- Егер $f(x,y) \leq g(x,y)$ болса, D – облысында онда

$$\iint_D f(x,y) dx dy \leq \iint_D g(x,y) dx dy$$

5. Егер D облысында $m \leq f(x,y) \leq M$, және $g(x,y)$ функциясының таңбасы тұрақты болса, онда $m \leq \mu \leq M$, μ саны табылып мына теңдік орындалады:

$$\iint_D f(x,y) g(x,y) dx dy = \mu \iint_D g(x,y) dx dy$$

Бұл қасиет интегралдың орта мәні жөніндегі теорема деп аталады.

Қос интегралды есептеу формуласы

D облысы жоғарыдан $y = Y(x)$, $y = y_0(x)$ ($a \leq x \leq b$) үзіліссіз қисықтарымен, ал екі бүйір жағынан $x = a$, $x = b$ түзулерімен шектелген болсын.

Теорема. Егер:

1) $\iint_D f(x, y) dx dy$ қос интегралы бар болса;

2) $[a, b]$ аралығындағы әрбір x –тің тұрақты мәнінде $\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y) dy$ интегралы

бар болса;

онда $\int_c^d dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y) dy$ қайталамалы интегралы да бар және

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y) dy. \quad (4)$$

Осы формула қос интегралды есептеу формуласы деп аталады.

Ескерту. Үш еселі интегралдың қасиеттері де қос интегралдікі сияқты